

Zur Theorie verwandter Endomorphismen

von

Hans Strauß

aus

Nürnberg

1968



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Zur Theorie verwandter Endomorphismen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Hans Strauß

aus

Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung: 27.11.1968

Dekan: Professor Dr. H. Wegener
Erstberichterstatter: Professor Dr. W. Specht
Zweitberichterstatter: Professor Dr. G. Nöbeling

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Grundlagen	4
§ 2. Zerfällende Endomorphismen	10
§ 3. Verwandte, zulässig und stark verwandte Endomorphismen	20
§ 4. Erweiterte Endomorphismen	29
§ 5. Verwandtschaft von Endomorphismen von endlicher Stufe und von endlichem Typus	34
§ 6. Verwandtschaft von zerfällenden Endomorphismen	38
§ 7. Verwandtschaft von uniform zerfällenden Endomorphismen	49
Literatur	55

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Endomorphismen einer Gruppe untersucht, deren Restriktionen auf einer Untergruppe von endlichem Index gleich sind (verwandte Endomorphismen). Wir stellen uns die Frage, welche Eigenschaften sich von einem Endomorphismus auf seine verwandten Endomorphismen vererben. Speziell gilt unser Interesse den zerfällenden und uniform zerfällenden Endomorphismen, die R. Baer charakterisiert hat. Als Beweismittel verwenden wir teilweise Kriterien aus Baer [1]. Eine besondere Rolle spielt das Kriterium für uniform zerfällende Endomorphismen, das wir in eine leichter faßbare Form bringen, wie sie W. Specht in einem Manuskript [6] vorgeschlagen hat. Die Eigenschaft "zerfällend" eines Endomorphismus überträgt sich im allgemeinen nicht auf seine verwandten Endomorphismen. Es interessiert daher, unter welchen Einschränkungen an die betrachteten Gruppen, bzw. an den Verwandtschaftsbegriff man die Vererbbarkeit sichern kann. Dieser Frage ist ein großer Teil der Arbeit gewidmet.

Im ersten Paragraphen werden Grundlagen aus der Theorie der Endomorphismen zusammengestellt. Der

zweite Paragraph bringt Kriterien für zerfällende, bzw. uniform zerfällende Endomorphismen. Unter anderem gewinnen wir eine Erweiterung eines Lemmas von Fitting [4] auf unendliche Gruppen.

Im dritten Paragraphen engen wir den Begriff verwandt nach zwei Seiten hin ein. Dabei erweist sich die zulässige Verwandtschaft gegenüber der starken Verwandtschaft als der fruchtbarere Begriff.

Für die weitere Untersuchung zulässig verwandter Endomorphismen werden im vierten Paragraphen vorbereitende Sätze bewiesen. Damit können wir im fünften Abschnitt zeigen, daß zulässig verwandte Endomorphismen gleichzeitig endliche Bildgruppenfolge, bzw. endliche Kernfolge besitzen (oder gleichzeitig nicht).

Als Hauptergebnisse erhalten wir im sechsten und siebten Paragraphen folgende Aussagen:

In jeder endlich erzeugten Gruppe sind mit einem zerfällenden Endomorphismus auch die verwandten Endomorphismen zerfällend. Die zulässig verwandten Endomorphismen eines zerfällenden Endomorphismus sind zerfällend. Die zulässig verwandten Endomorphismen eines uniform zerfällenden Endomorphismus sind uniform zerfällend.

Die ersten drei Abschnitte dieser Arbeit stützen sich

auf ein Manuskript meines verehrten Lehrers, Herrn
Prof. Dr. W. Specht. Für die Anregung zu dieser Arbeit
und seine großzügige Unterstützung möchte ich ihm
herzlich danken.

§ 1. Grundlagen.

Den Untersuchungen sei eine beliebige Gruppe G zugrunde gelegt.

Als (normierte) Abbildung der Gruppe G in sich bezeichnen wir jede Abbildung

$$\sigma : G \longrightarrow G$$

der Menge G in sich, die für die Einheit e der Bedingung genügt:

$$e\sigma = e.$$

Als Bildgruppe $G\sigma$ und Kern $K(\sigma)$ einer Abbildung bezeichnen wir die Komposita

$$G\sigma = \{g \underset{e}{\cup} G \sigma\}, \quad K(\sigma) = \{g \in G \mid g\sigma = e\}.$$

Der Kern $K(\sigma)$ enthält mindestens die Einheit.

Zwei Abbildungen σ, τ der Gruppe G in sich sind als gleich anzusehen, wenn

$$\sigma = \tau : \quad g\sigma = g\tau \quad \text{für jedes } g \in G.$$

Schließlich bedeute $N(G)$ die Menge aller (normierten) Abbildungen der Gruppe G in sich.

Für jedes (geordnete) Paar von Abbildungen $\sigma, \tau \in N(G)$ lassen sich Summe und Produkt erklären

$$\sigma + \tau : g \longrightarrow g(\sigma + \tau) = g\sigma g\tau \quad \text{für } g \in G,$$

$$\sigma\tau : g \longrightarrow g(\sigma\tau) = (g\sigma)\tau \quad \text{für } g \in G.$$

Wegen

$$e(\sigma + \tau) = e\sigma + e\tau = e, \quad e(\sigma\tau) = (e\sigma)\tau = e$$

sind auch $\sigma + \tau$ und $\sigma\tau$ (normierte) Abbildungen.

Bezüglich der Addition bilden die Abbildungen $\sigma \in N(G)$ eine (nicht notwendig kommutative) Gruppe mit der Nullabbildung 0 als Einheit und der inversen Abbildung

$$\sigma' = -\sigma : g \longrightarrow g\sigma' = (g\sigma)^{-1} \quad \text{für } g \in G.$$

Bezüglich der Multiplikation bilden die Abbildungen $\sigma \in N(G)$ eine Halbgruppe mit der Identität ε

$$\varepsilon : g \longrightarrow g\varepsilon = g \quad \text{für } g \in G$$

als Einheit.

Eine Abbildung $\tau \in N(G)$, die der Homomorphiebedingung

$$(gh)\tau = g\tau h\tau \quad \text{für } g, h \in G$$

genügt, heißt Endomorphismus der Gruppe. Die Menge aller Endomorphismen der Gruppe G bezeichnen wir mit $E(G)$. Die Summe zweier Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ ist eine (normierte) Abbildung, im allgemeinen aber kein Endomorphismus. Die Abbildung $\sigma + \tau$ ist genau dann Endomorphismus, wenn die Bildgruppen $G\sigma, G\tau$ der Kommutatorbedingung

$$[G\sigma, G\tau] = E$$

genügen.

Jeder Endomorphismus $\tau \in E(G)$ mit den Eigenschaften

$$G\tau = G, \quad K(\tau) = E$$

ist Automorphismus der Gruppe G . Die Menge der Automorphismen auf G , genannt $A(G)$, bildet bezüglich der Multiplikation eine Gruppe. Schließlich heißt ein Endomorphismus $\tau \in E(G)$ Monomorphismus, bzw. Epimorphismus, wenn $K(\tau) = E$, bzw. $G\tau = G$ gilt.

Die Potenzen des Endomorphismus $\tau \in E(G)$ sind durch

$$g\tau^0 = g, \quad (g\tau^k)\tau = g\tau^{k+1}$$

erklärt.

Definition 1.1. Eine Untergruppe U einer Gruppe G , auf der Endomorphismen $\tau_i \in E(G)$ für $1 \leq i \leq n$ erklärt sind, heißt $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ -zulässig, bzw. $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ -vollständig, wenn

$$U\tau_i \leq U, \text{ bzw. } U\tau_i = U \text{ für alle } i.$$

Ein Endomorphismus $\tau \in E(G)$ induziert in der τ -zulässigen Untergruppe $U \leq G$ einen Endomorphismus $\tau_0 := \tau|_U$

$$\tau_0 : g \longrightarrow g\tau_0 = g\tau \quad \text{für } g \in U.$$

Für jeden τ -zulässigen Normalteiler N in G induziert τ in der Faktorgruppe G/N den Endomorphismus

$$\tau_1 : gN \longrightarrow (gN)\tau_1 = g\tau N \quad \text{für } g \in G$$

mit der Bildgruppe

$$(G/N)\tau_1 = G\tau N/N.$$

Beispiele von zulässigen Untergruppen sind :

Definition 1.2. In der Gruppe G mit dem Endomorphi-

mus $\tau \in E(G)$ ist ein nichtleerer Komplex M gegeben.
Unter

$$H = \{ M; \tau \}$$

verstehen wir, die von M erzeugte τ -zulässige Untergruppe in G , d.h. den Durchschnitt aller den Komplex M umfassenden τ -zulässigen Untergruppen von G .

Die von einem Element $g \in G$ erzeugte Untergruppe $\{g; \tau\}$ heiße τ -zyklisch.

Eine τ -zulässige Untergruppe U nennen wir τ -lokal, wenn für einen endlichen Komplex $L \leq G$ die Gleichung

$$U = \{ L; \tau \}$$

besteht.

Zu jedem Endomorphismus $\tau \in E(G)$ läßt sich eine (absteigende) Bildgruppenfolge $(G^{(\nu)})$ erklären.

Sei σ_G die erste Ordinalzahl, deren Mächtigkeit die Mächtigkeit der Menge G übersteigt, so bezeichne $\Lambda = \Lambda_G$ die (wohlgeordnete) Indexmenge aller Ordinalzahlen $\nu \leq \sigma_G$. Dann erklären wir

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(\nu+1)} = G^{(\nu)} \tau \quad \text{für alle } \nu \in \Lambda,$$

$$G^{(\lambda)} = \bigcap_{\nu < \lambda} G^{(\nu)} \quad \text{für jeden Limesindex } \lambda \in \Lambda.$$

Für einen ersten Index $\mu = \mu(\tau)$ besteht eine Gleichung

$$(1.1) \quad G^{(\mu+1)} = G^{(\mu)} \tau = G^{(\mu)},$$

also gilt

$$G^{(\mu)} = \bigcap_{\nu \in \Lambda} G^{(\nu)}.$$

Definition 1.3. Wir bezeichnen die Ordinalzahl $\mu = \mu(\tau)$ von (1.1) als den Typus des Endomorphismus $\tau \in E(G)$. Ist μ endlich, so heißt τ von endlichem Typus.

Für jeden Endomorphismus $\tau \in E(G)$ bilden die Kerne $K(\tau^k)$ der Potenzen τ^k eine aufsteigende Normalteilerfolge in G , die sogenannte Kernfolge

$$E = K(\tau^0) \subseteq K(\tau) \subseteq \dots \subseteq K(\tau^n) \subseteq K(\tau^{n+1}) \subseteq \dots$$

Die Vereinigung

$$R(\tau) = \bigcup K(\tau^i)$$

ist Normalteiler und wird als das Radikal $R(\tau)$ des Endomorphismus $\tau \in E(G)$ bezeichnet.

Definition 1.4. Es kann für einen ersten Exponenten $l = l(\tau)$ eine Beziehung

$$(1.2) \quad K(\tau^l) = K(\tau^{l+1})$$

eintreten. Ist l endlich, so heißt l die Stufe des Endomorphismus $\tau \in E(G)$. Ist l unendlich, heißt τ von unendlicher Stufe.

Unter der Bedingung (1.2) gilt $R(\tau) = K(\tau^l)$.

Definition 1.5. Der Endomorphismus $\tau \in E(G)$ heißt τ - lokal von endlichem Typus, bzw. τ - lokal von endlicher Stufe, wenn er in jeder τ - lokalen Untergruppe einen Endomorphismus von endlichem Typus, bzw. endlicher Stufe induziert.

Für die Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ sind die Differenzen

$$\xi = \tau - \sigma : g \longrightarrow g\xi = g\tau(g\sigma)^{-1},$$

$$\eta = \sigma - \tau : g \longrightarrow g\eta = g\sigma(g\tau)^{-1}$$

Abbildungen der Gruppe G in sich, die der Gleichung $\xi = -\eta$ genügen.

Die Bildgruppen $G(\sigma - \tau)$ und $G(\tau - \sigma)$ haben die Gestalt

$$G(\sigma - \tau) = \left\{ \bigcup_{g \in G} g\sigma(g\tau)^{-1} \right\},$$

$$G(\tau - \sigma) = G(\sigma - \tau)$$

und die Kerne $K(\sigma - \tau)$ und $K(\tau - \sigma)$

$$K(\sigma - \tau) = \{g \in G \mid g\sigma(g\tau)^{-1} = e\},$$

$$K(\tau - \sigma) = K(\sigma - \tau).$$

$K(\sigma - \tau) = K(\tau - \sigma)$ ist die maximale Untergruppe von G , auf der σ und τ übereinstimmen

$$g\sigma = g\tau \quad \text{für } g \in K(\sigma - \tau).$$

Die zum Endomorphismus $\tau \in E(G)$ gehörige Abbildung

$$\eta = \varepsilon - \tau : g \longrightarrow g\eta = g \cdot (g\tau)^{-1} \quad \text{für } g \in G$$

hat unter Benutzung der Schreibweise

$$[g, \tau] = g^{-1} g\tau \quad \text{für } g \in G$$

als Bild den τ - Kommutator $[G, \tau]$

$$G\eta = G(\varepsilon - \tau) = [G, \tau] = \left\{ \bigcup_{g \in G} [g, \tau] \right\}.$$

§ 2. Zerfallende Endomorphismen.

In diesem Abschnitt wenden wir uns speziellen Endomorphismen zu.

Definition 2.1. Der Endomorphismus $\tau \in E(G)$ heißt zerfallend, wenn es eine Untergruppe $C(\tau) \leq G$ mit den Eigenschaften

- (a) $C(\tau)\tau = C(\tau)$,
- (b) $C(\tau) \cap R(\tau) = E$,
- (c) $C(\tau)R(\tau) = G$.

gibt. $C(\tau)$ heißt Komplement für τ .

Definition 2.2. Ein Endomorphismus $\tau \in E(G)$ heißt uniform zerfallend, wenn er auf jeder τ -zulässigen Untergruppe einen zerfallenden Endomorphismus induziert.

Die Menge der uniform zerfallenden Endomorphismen einer Gruppe ist echt in der Menge der zerfallenden Endomorphismen enthalten.

Automorphismen sind zerfallende Endomorphismen, im allgemeinen aber keine uniform zerfallenden Endomorphismen. Sonst müßte ein Automorphismus auf jeder zulässigen Untergruppe einen Automorphismus induzieren.

Gegenbeispiele sind:

- (a). Ein Automorphismus auf der additiven Gruppe $\mathbb{R}^+$ der rationalen Zahlen ist durch

$$\alpha: g \longrightarrow 2g \quad \text{für alle } g \in \mathbb{R}^+.$$

gegeben. α induziert auf der Untergruppe der ganzen Zahlen keinen Automorphismus.

(b). In der endlich erzeugten Gruppe $G = \{a, b\}$ mit der Relation $a^2 = b^{-1}ab$ induziert der innere Automorphismus

$$\beta: g \longrightarrow b^{-1}gb \quad \text{für alle } g \in G$$

auf der Untergruppe $U = \{a\}$ keinen Automorphismus.

Jedoch überträgt sich die Zerfällung auf Untergruppen von endlichem Index, wie jetzt gezeigt werden soll.

Lemma 2.3. Ein Epimorphismus induziert auf jeder zulässigen Untergruppe von endlichem Index einen Epimorphismus.

Beweis. Die Gruppe G besitze einen Epimorphismus α . Die Restklassenzerlegung nach einer α -zulässigen Untergruppe V ist durch

$$(2.1) \quad G = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} V$$

gegeben. Nun erhalten wir aus

$$G = G\alpha = \left(\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} V \right) \alpha = \bigcup_{\nu=1}^n (a_{\nu} \alpha) V\alpha$$

die Beziehung

$$(2.2) \quad [G : V\alpha] \leq n.$$

Wegen $V\alpha \subseteq V$ und den Aussagen (2.1) und (2.2) folgt die Behauptung $V\alpha = V$.

Satz 2.4. Ein zerfällender Endomorphismus $\eta \in E(G)$ induziert in jeder η -zulässigen Untergruppe V

von endlichem Index einen zerfallenden Endomorphismus $\eta_0 \in E(V)$. Es gilt

$$(2.3) \quad R(\eta_0) = R(\eta) \cap V, \quad C(\eta_0) = C(\eta) \cap V,$$

wobei $R(\eta)$ das Radikal von η und $C(\eta)$ ein Komplement ist.

Beweis. Es zeigt sich sofort, daß $R(\eta_0)$ Radikal von η_0 ist.

Wir haben nur noch zu zeigen, daß $C(\eta_0)$ ein Komplement ist.

Aus den Beziehungen

$$C(\eta) \eta = C(\eta), \quad [C(\eta) : (C(\eta) \cap V)] < \infty,$$

$$(C(\eta) \cap V) \eta \leq C(\eta) \cap V$$

und Lemma 2.3 folgt

$$(2.4) \quad C(\eta) \cap V = C(\eta_0) = C(\eta_0) \eta.$$

Aus Gleichung (2.3) ergibt sich wegen $C(\eta) \cap R(\eta) = E$

$$(2.5) \quad C(\eta_0) \cap R(\eta_0) = E.$$

Jedes Element $g \in G$ ist darstellbar durch eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$$g = c \tau \text{ mit } c \in C(\eta), \tau \in R(\eta).$$

Wir zeigen, daß für ein Element $g \in V$ sogar

$$c \in C(\eta_0), \tau \in R(\eta_0)$$

gilt. Für ein $k = k(\tau)$ besteht die Gleichung $\tau \eta^k = e$, d.h. $g \eta^k = c \eta^k$. V ist η -zulässig und $C(\eta)$ η -vollständig, sodaß die Beziehungen

$$g \eta^k = c \eta^k \in C(\eta) \cap V = C(\eta_0)$$

gelten. Nach (2.4) und (2.5) induziert η auf $C(\eta_0)$ einen Automorphismus $\eta_1 = \eta|_{C(\eta_0)}$, weshalb das Urbild von $c\eta^k = c\eta_1^k$ bezüglich des Automorphismus η_1^k der Bedingung

$$c \in C(\eta_0)$$

genügt. Weil $g \in V$, ist auch $\tau \in V$, d.h.

$$\tau \in R(\eta) \cap V = R(\eta_0).$$

Damit ist die Zerlegung

$$V = C(\eta_0) R(\eta_0)$$

bewiesen.

Im folgenden werden Kriterien für zerfällende und uniform zerfällende Endomorphismen angegeben.

Definition 2.1 zeigt, daß durch einen zerfällenden Endomorphismus eine semidirekte Zerlegung einer Gruppe beschrieben wird. Das kommt in folgender Charakterisierung zum Ausdruck.

Satz 2.5. Der Endomorphismus $\eta \in E(G)$ ist genau dann zerfällend, wenn ein idempotenter Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ mit den Eigenschaften

$$R(\sigma) = R(\eta), \quad G\sigma \leq G\eta$$

existiert.

Beweis siehe [5].

Ein hinreichendes Kriterium für zerfällende Endomorphismen liefert Satz 2.7. Für den Beweis ist noch folgendes Lemma nötig:

Lemma 2.6. Ein Epimorphismus von endlicher Stufe ist Automorphismus.

Beweis: Weil η von endlicher Stufe ist, gilt für eine natürliche Zahl s

$$K(\eta^{s+1}) = K(\eta^s);$$

weiterhin ist η Epimorphismus

$$G\eta = G,$$

d.h. auch $G\eta^s = G.$

Damit lassen sich folgende Beziehungen angeben

$$K(\eta) = G \cap K(\eta) = G\eta^s \cap K(\eta) = K(\eta^{s+1})\eta^s = K(\eta^s)\eta^s = E.$$

Also ist $\eta \in A(G).$

Satz 2.7. Ein Endomorphismus von endlicher Stufe und endlichem Typus ist zerfällend.

Beweis: Wenn $\eta \in E(G)$ von endlicher Stufe und endlichem Typus ist, so gilt für eine natürliche Zahl l

$$G\eta^l = G\eta^{l+1} = B,$$

$$K(\eta^l) = K(\eta^{l+1}) = A.$$

Der induzierte Endomorphismus $\eta_0 = \eta|B$ ist Epimorphismus von endlicher Stufe und somit nach Lemma 2.6 auch Automorphismus, d.h.

$$B\eta = B, \quad A \cap B = E.$$

Für jedes Element $g\eta^l$ gibt es ein Element $h \in B$, sodaß

$$h\eta^l = g\eta^l$$

gilt, da η auf B einen Automorphismus induziert. Wegen $h \in B = G\eta^L$ gilt für ein Element $f \in G$ $f\eta^L = h$, also

$$(f\eta^L)\eta^L = g\eta^L.$$

Diese Gleichung läßt sich umformen zu

$$g\eta^L(f^{-1}\eta^L)\eta^L = e$$

und ergibt

$$g(f^{-1}\eta^L) \in A, \text{ d.h. } g \in A(f\eta^L).$$

Somit gilt für jedes Element $g \in G$ auch $g \in AB$.

Für die Gruppe existiert also eine semidirekte Zerlegung

$$G = AB.$$

Der Endomorphismus $\eta \in E(G)$ ist zerfällend mit dem Radikal $R(\eta) = A$ und dem Komplement B .

Die eben beschriebenen Endomorphismen stellen nicht die Gesamtheit der zerfällenden Endomorphismen dar. In der Gruppe G vom Typus p^w (siehe [5], S. 75) ist der Endomorphismus

$$\eta: g \longrightarrow pg \quad \text{für } g \in G$$

definiert. Das Radikal $R(\eta)$ besteht aus der gesamten Gruppe G , somit ist η zerfällend. η besitzt aber keine endliche Kernfolge.

In einem späteren Teil der Arbeit werden wir folgende eingeschränkte Umkehrung von Satz 2.7 benötigen:

Satz 2.8. In einer endlich erzeugten Gruppe ist ein zerfällender Endomorphismus von endlichem Typus und endlicher Stufe.

Beweis: Der Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ ist zerfällend. Er besitzt daher zu seinem Radikal $R(\sigma)$ ein Komplement $C(\sigma)$

$C(\sigma)$ ist homomorphes Bild von G , denn nach Satz 2.5 gibt es zu jedem zerfällenden Endomorphismus σ einen zugehörigen idempotenten Endomorphismus $\sigma' \in E(G)$ mit der Eigenschaft

$$G\sigma' = C(\sigma).$$

Als homomorphes Bild einer endlich erzeugten Gruppe ist $C(\sigma)$ wieder endlich erzeugt.

Die Elemente des Erzeugendensystems der Gruppe G

$$G = \{ \sum_{\mu=1}^m g_{\mu} \}$$

können folgendermaßen zerlegt werden

$$g_{\mu} = c_{\mu} \tau_{\mu} \text{ mit } c_{\mu} \in C(\sigma), \tau_{\mu} \in R(\sigma) \text{ für } 1 \leq \mu \leq m.$$

Nun gilt für natürliche Zahlen l_{μ}

$$\tau_{\mu} \sigma^{l_{\mu}} = e \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

$$\text{d.h.} \quad g_{\mu} \sigma^{l_{\mu}} = c_{\mu} \sigma^{l_{\mu}} \in C(\sigma).$$

Das Maximum $l = \max_{1 \leq \mu \leq m} l_{\mu}$ liefert

$$G\sigma^l \subseteq C(\sigma),$$

sodaß σ wegen

$$G\sigma^l \subseteq C(\sigma) = C(\sigma)\sigma^{l+1} \subseteq G\sigma^{l+1},$$

$$\text{d.h.} \quad G\sigma^l = G\sigma^{l+1} = C(\sigma)$$

von endlichem Typus ist.

σ induziert auf $C(\sigma)$ einen Automorphismus. Daraus ergibt sich

$$K(\sigma^t) = K(\sigma^{t+1}),$$

also ist σ auch von endlicher Stufe.

Das folgende Kriterium für uniform zerfallende Endomorphismen ist eine leichte Modifizierung, der in [1] und [5] enthaltenen Sätze.

Satz 2.9. Der Endomorphismus $\eta \in E(G)$ ist genau dann uniform zerfallend, wenn er η -lokal von endlichem Typus und η -lokal von endlicher Stufe ist.

Beweis: η sei uniform zerfallend. Auf der η -zulässigen Untergruppe $U = \{ \bigcup_{v=1}^n g_v ; \eta \}$ mit den Elementen $g_v \in G$ für $1 \leq v \leq n$ induziert $\eta_0 = \eta|_U$ einen zerfallenden Endomorphismus, sodaß ein Komplement $C(\eta_0)$ existiert. Für Elemente

$$g_v = c_v r_v \text{ mit } c_v \in C(\eta_0), r_v \in R(\eta_0) \text{ für } 1 \leq v \leq n$$

lassen sich natürliche Zahlen k_v finden, sodaß

$$r_v \eta^{k_v} = e \text{ und daher } g_v \eta^{k_v} = c_v \eta^{k_v}$$

gilt. Wenn $k = \max_{1 \leq v \leq n} k_v$, erhalten wir aus

$$U \eta^k = \{ \bigcup_{v=1}^n c_v \eta^k ; \eta \} \subseteq C(\eta_0) = C(\eta_0) \eta^{k+1} \subseteq U \eta^{k+1}$$

die Beziehung

$$U \eta^k = U \eta^{k+1} = C(\eta_0).$$

η_0 ist also von endlichem Typus.

Schließlich folgt aus den Beziehungen

$$K(\eta_0^{k+1}) \eta^k = U \eta^k \cap K(\eta_0) \subseteq$$

$$U \eta^k \cap R(\eta_0) = C(\eta_0) \cap R(\eta_0) = E$$

für die Kerne von η_0^{k+1} und η_0^k

$$K(\eta_0^{k+1}) \subseteq K(\eta_0^k),$$

sodaß η_0 auch von endlicher Stufe ist

$$K(\eta_0^{k+1}) = K(\eta_0^k).$$

Es sei umgekehrt η η -lokal von endlicher Stufe und η -lokal von endlichem Typus.

Mit C bezeichnen wir die Menge aller Elemente, für die $\{c; \eta\} \eta = \{c; \eta\}$ gilt. Es zeigt sich, daß C η -zulässige Untergruppe von G ist.

Auf der η -lokalen Untergruppe $H = \{c_1, c_2; \eta\}$ mit den Elementen $c_1, c_2 \in C$ ist der induzierte Endomorphismus $\eta_1 = \eta|_H$ Epimorphismus $H\eta_1 = H$ von endlicher Stufe, nach Lemma 2.6 also Automorphismus von H .

Deshalb gilt

$$R(\eta_1) = H \cap R(\eta) = E.$$

Insbesondere genügt jedes Element $v \in H$ der Beziehung

$$(2.6) \quad \{v; \eta\} \cap R(\eta) = E.$$

Nach Voraussetzung gilt für eine natürliche Zahl $l = l(v)$

$$\{v; \eta\} \eta^l = \{v; \eta\} \eta^{l+1}.$$

Zusammen mit (2.6) ergibt sich

$$\{v; \eta\} \eta = \{v; \eta\}$$

und daraus folgt $H \subseteq C$.

C ist also η -zulässige Untergruppe von G mit den Eigenschaften

$$C\eta = C, C \cap R(\eta) = E.$$

Für jedes Element $g \in G$ besteht eine Gleichung

$$\{g\eta^m; \eta\} = \{g; \eta\}\eta^m = \{g; \eta\}\eta^{m+1} = \{g\eta^m; \eta\}\eta,$$

$$\text{d.h. } g\eta^m \in C.$$

Weil $\eta|C$ Automorphismus von C ist, existiert ein $h \in C$ mit der Eigenschaft

$$h\eta^m = g\eta^m, \text{ also } g \in hR(\eta).$$

Die Gruppe G besitzt die Zerlegung

$$G = CR(\eta).$$

Bis jetzt ist gezeigt, daß η zerfällend ist.

Die Konstruktion läßt sich auf eine η - zulässige Untergruppe U übertragen, da auch hier die Voraussetzungen des Satzes gültig sind. Wir erhalten die Zerlegung in Radikal $R(\eta) \cap U$ und Komplement $C \cap U$

$$U = (U \cap R(\eta))(U \cap C).$$

Somit ist η uniform zerfällend.

§ 3. Verwandte, zulässig und stark verwandte Endomorphismen.

Im folgenden betrachten wir die Differenz $\delta = \sigma - \tau$ zweier Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$. $\forall_{\sigma, \tau}$ bezeichne stets eine (σ, τ) -zulässige Untergruppe von endlichem Index, die im Kern $K(\sigma - \tau)$ liegt.

Definition 3.1. Zwei Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ seien gegeben, sie heißen

- (a) verwandt, wenn die Untergruppe $K(\sigma - \tau)$ von endlichem Index ist, $(\sigma \sim \tau)$;
- (b) stark verwandt, wenn die Bildgruppe $G(\sigma - \tau)$ endlich ist, $(\sigma \approx \tau)$;
- (c) zulässig verwandt, wenn eine Untergruppe vom Typ $\forall_{\sigma, \tau}$ existiert, $(\sigma \approx \tau)$.

Satz 3.2. Die Verwandtschaft, bzw. zulässige Verwandtschaft von Endomorphismen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma \sim \sigma, \text{ bzw. } \sigma \approx \sigma & \quad \sigma \in E(G), \\ \sigma \sim \tau \longrightarrow \tau \sim \sigma, \text{ bzw. } \sigma \approx \tau \longrightarrow \tau \approx \sigma & \quad \sigma, \tau \in E(G) \end{aligned}$$

lassen sich sofort aus den Definitionen erkennen. Es zeigt sich weiterhin

$$(3.1) \quad \sigma \sim \tau, \tau \sim \lambda \longrightarrow \sigma \sim \lambda \quad \sigma, \tau, \lambda \in E(G).$$

Nach Voraussetzung sind die Untergruppen $K(\sigma - \tau)$ und $K(\tau - \lambda)$ von endlichem Index, sodaß wir mit Hilfe des Satzes von Poincaré ([5], S.36)

$$[G : (K(\sigma - \tau) \cap K(\tau - \lambda))] < \infty$$

erhalten. Aus

$$K(\sigma - \tau) \cap K(\tau - \lambda) \leq K(\sigma - \lambda)$$

folgt die Behauptung (3.1).

Ähnlich beweist man

$$(3.2) \quad \sigma \approx \tau, \tau \approx \lambda \longrightarrow \sigma \approx \lambda, \sigma, \tau, \lambda \in E(G).$$

Mit den Untergruppen $V_{\sigma, \tau}$ und $V_{\tau, \lambda}$, die von endlichem Index in G sind, definieren wir

$$V_{\sigma, \lambda} = V_{\sigma, \tau} \cap V_{\tau, \lambda}$$

und erhalten auf Grund des Satzes von Poincaré

$$[G : V_{\sigma, \lambda}] = [G : (V_{\sigma, \tau} \cap V_{\tau, \lambda})] < \infty,$$

außerdem ist $V_{\sigma, \lambda}$ (σ, λ) -zulässig und $V_{\sigma, \lambda} \leq K(\sigma - \lambda)$. Damit ist die Behauptung (3.2) nachgewiesen.

Die starke Verwandtschaft ist im allgemeinen keine Äquivalenzrelation (vgl. Bemerkung 3.4).

Satz 3.3. Zwei Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ seien gegeben:

- (a). Sind sie zulässig verwandt, so sind sie auch verwandt.
- (b). Sind sie stark verwandt, so sind sie auch verwandt.

(c). Aus starker Verwandtschaft oder Verwandtschaft von σ und τ folgt nicht, daß σ und τ zulässig verwandt sind.

(d). Aus zulässiger Verwandtschaft oder Verwandtschaft von σ und τ folgt nicht, daß σ und τ stark verwandt sind.

Beweis: (a). Die Aussage folgt sofort aus den Definitionen.

(b). Es gibt nur endlich viele Elemente der Gestalt $g\sigma(g\tau)^{-1}$ mit $g \in G$. Genau dann gilt

wenn $g\sigma(g\tau)^{-1} = h\sigma(h\tau)^{-1} \quad g, h \in G,$

$$(h^{-1}g)\sigma = (h^{-1}g)\tau,$$

also $h^{-1}g \in K(\sigma - \tau)$. Daher ist $K(\sigma - \tau)$ von endlichem Index.

(c). Die Gruppe G ist direkte Summe endlicher zyklischer Gruppen $Z_i = \{g_i\}$ der Ordnung n , d.h.

$$G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i.$$

Ein Erzeugendensystem ist durch

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{g}_i,$$

$$\bar{g}_i = (\dots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \dots)$$

gegeben, wobei e_i das Einheitsselement von Z_i ist (E_i bezeichne im folgenden die von e_i dargestellte Untergruppe in Z_i).

Zwei Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ sind durch

$$\sigma : \bar{g}_i \longrightarrow \bar{g}_{i-1} \quad -\infty < i < \infty,$$

$$\begin{aligned} \tau: \quad \bar{g}_i &\longrightarrow \bar{g}_{i-1} & i \leq 0, i \geq 2, \\ \bar{g}_1 &\longrightarrow \bar{e} \end{aligned}$$

definiert ($\bar{e}$ ist das Einheitsselement von G).

σ und τ sind stark verwandt; denn die Bildgruppe

$$G(\sigma - \tau) = \dots \oplus E_{-2} \oplus E_{-1} \oplus Z_0 \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus \dots$$

ist von endlicher Ordnung n . Nach (b) sind σ und τ auch verwandt.

Der Kern

$$H = K(\sigma - \tau) = \dots \oplus Z_{-1} \oplus Z_0 \oplus E_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus \dots$$

enthält keine (σ, τ) - zulässige Untergruppe von endlichem Index.

Dies soll indirekt bewiesen werden. Wir nehmen an, es gebe eine Untergruppe $V \subseteq G$ mit den Eigenschaften

$$(3.3) \quad V \subseteq K(\sigma - \tau), [G : V] < \infty, V\sigma \subseteq V.$$

Weil σ ein Automorphismus ist, folgt nach Lemma 2.3

$$V\sigma = V.$$

Nun besitze die Gruppe die Zerlegung $G = \sum_{v=1}^m \alpha_v V$. Die Bildgruppenfolge von $K(\sigma - \tau)$ ist

$$K(\sigma - \tau)\sigma^i = \dots \oplus Z_{-(i+1)} \oplus Z_{-i} \oplus E_{-i+1} \oplus Z_{-i+2} \oplus Z_{-i+3} \oplus \dots$$

Da die Menge der Repräsentanten endlich ist, gibt es eine natürliche Zahl k , für die alle Repräsentanten als $(-k+1)$ -Komponente e_{-k+1} besitzen. Für solch eine Zahl k gilt

$$\bigcup_{v=1}^m \alpha_v \subseteq H\sigma^k$$

und daraus folgt wegen

$$V = V \sigma^k \subseteq H \sigma^k$$

die Beziehung

$$G = \sum_1^m \alpha_i V \subseteq H \sigma^k \subseteq G.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, die Annahme (3.3) ist nicht richtig. Also ist (c) gezeigt.

(d). Gegeben sei eine Gruppe

$$G = A * B$$

als freies Produkt zweier endlicher Gruppen A und B. Es werden folgende Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ definiert

$$a\sigma = a, \quad b\sigma = e \quad \text{für alle } a \in A, b \in B,$$

$$a\tau = e, \quad b\tau = b.$$

Die Differenz von σ , bzw. τ mit dem Nullendomorphismus $o \in E(G)$ ergibt endliche Bildgruppen

$$G(\sigma - o) = A, \quad G(\tau - o) = B.$$

σ und o , bzw. τ und o sind jeweils stark verwandt, nach Aussage (b) also auch verwandt. Die Verwandtschaft von Endomorphismen ist eine Äquivalenzrelation, daher sind σ und τ verwandt.

Schließlich sind σ und τ auch zulässig verwandt; denn aus $G\sigma \wedge G\tau = e$ ergibt sich

$$K(\sigma - \tau)\sigma = K(\sigma - \tau)\tau = e.$$

$K(\sigma - \tau)$ ist (σ, τ) - zulässig und es kann $\forall \sigma, \tau = K(\sigma - \tau)$ gesetzt werden.

σ und τ sind aber nicht stark verwandt; denn die Untergruppen A und B haben bezüglich der Abbildung $\sigma - \tau$ die Bilder

$$A(\sigma - \tau) = A, B(\sigma - \tau) = B,$$

sodaß sich für die Gruppe G als Bildgruppe

$$G(\sigma - \tau) = \{A, B\} = G$$

ergibt. G ist aber nicht endlich.

Damit ist (d) gezeigt.

Bemerkung 3.4. Aus Satz 3.3 folgt auch, daß die starke Verwandtschaft keine Äquivalenzrelation ist. σ und σ , bzw. τ und σ sind stark verwandt, aber σ und τ sind nicht mehr stark verwandt. (Siehe Teil (d)).

Satz 3.5. In lokalendlichen Gruppen sind verwandte Endomorphismen stark verwandt.

Beweis: Zwei verwandte Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ liefern eine Restklassendarstellung

$$G = \sum_{v=1}^n g_v K(\sigma - \tau) \quad \text{mit } g_v \in G$$

Die Bildgruppe

$$G(\sigma - \tau) = \{ (\sum_{v=1}^n g_v K(\sigma - \tau)) (\sigma - \tau) \} = \{ \bigcup_1^n g_v (\sigma - \tau) \}$$

ist nach Voraussetzung endlich.

Satz 3.6. (a). Endomorphismen einer Gruppe sind zum Nullendomorphismus genau dann stark verwandt, wenn sie verwandt sind.

(b). Endomorphismen einer ordnungsfiniten Gruppe sind zum identischen Endomorphismus genau dann stark verwandt, wenn sie verwandt sind.

Beweis: Die Differenz des Nullendomorphismus $o \in E(G)$ mit einem verwandten Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ liefert die Bildgruppe

$$G(\sigma - o) = G\sigma \cong G/K(\sigma)$$

und beweist damit die Aussage (a).

(b). Der Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ sei zum identischen Endomorphismus $\epsilon \in E(G)$ verwandt. Nach § 1 ist $K(\epsilon - \sigma)$ die Fixgruppe von σ . Der maximale in $K(\epsilon - \sigma)$ enthaltene Normalteiler D ist von endlichem Index in G . Für jedes Paar $g \in G, d \in D$ gilt

$$g\sigma d g^{-1}\sigma = (g d g^{-1})\sigma = g d g^{-1},$$

d.h. $[g^{-1} g\sigma, d] = e$.

Der Zentralisator H des σ -Kommutators $[G, \sigma]$ umfaßt also D und ist damit von endlichem Index. Jedes Element von $[G, \sigma]$ gehört einer Ähnlichkeitsklasse endlicher Ordnung in G an. $G(\epsilon - \sigma)$ ist somit eine endlich erzeugte, ordnungsfinite und klassenfinite Gruppe und nach einem bekannten Satz von Dietzmann [5] von endlicher Ordnung. Daher sind σ und τ stark verwandt.

Satz 3.7. Die Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ seien (zulässig), (stark) verwandt.

(a). Die auf einer (σ, τ) - zulässigen Untergruppe $U \leq G$ induzierten Endomorphismen sind auch (zulässig), (stark) verwandt.

(b). In einer Faktorgruppe G/N der Gruppe G nach einem (σ, τ) - zulässigen Normalteiler N induzieren σ und τ (zulässige), (stark) verwandte Endomorphismen.

Beweis: (a). Die Restriktionen der verwandten Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ auf U $\sigma|U$ und $\tau|U$ führen zu der Untergruppe

$$K(\sigma|U - \tau|U) = K(\sigma - \tau) \cap U,$$

für die

$$[U : (K(\sigma - \tau) \cap U)] \leq [G : K(\sigma - \tau)] < \infty$$

gilt. Daher sind $\sigma|U$ und $\tau|U$ auch verwandt.

Ähnlich verläuft der Beweis für zulässige Verwandtschaft, wo statt $K(\sigma - \tau)$ die Untergruppe $V_{\sigma, \tau}$ betrachtet wird.

Aus der Beziehung

$$U(\sigma - \tau) \leq G(\sigma - \tau)$$

folgt unter Voraussetzung der starken Verwandtschaft von σ und τ die starke Verwandtschaft von $\sigma|U$ und $\tau|U$.

(b). In der Faktorgruppe G/N heißen die induzierten Endomorphismen $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in E(G/N)$. Der Kern $K(\bar{\sigma} - \bar{\tau})$ besteht aus den Elementen $(gN)\sigma = (gN)\tau$, d.h.

$$N K(\sigma - \tau) / N \leq K(\bar{\sigma} - \bar{\tau}).$$

Wenn σ und τ verwandt sind, bestehen die Beziehungen

$$[G/N : K(\bar{\sigma} - \bar{\tau})] \leq [G/N : NK(\sigma - \tau)/N] =$$

$$[G : NK(\sigma - \tau)] \leq [G : K(\sigma - \tau)] < \infty$$

und daher sind $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ verwandt. Ähnlich verläuft der Beweis für zulässig verwandte Endomorphismen. Die Bildgruppe

$$G/N(\bar{\sigma} - \bar{\tau}) = \{ \bigcup_{g \in G} g\sigma(g\tau)^{-1}N \}$$

ist endlich, wenn $|G(\sigma - \tau)| < \infty$ gilt. Somit folgt aus starker Verwandtschaft von σ und τ die starke Verwandtschaft von $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$.

§ 4. Erweiterte Endomorphismen.

In der Gruppe G besitze der Endomorphismus $\eta \in E(G)$ eine η -zulässige Untergruppe U von endlichem Index. Man kann η als Erweiterung des Endomorphismus $\eta|_U$ von U auf G ansehen. Zwei zulässig verwandte Endomorphismen sind (verschiedene) Erweiterungen eines Endomorphismus, der auf einer Untergruppe von endlichem Index definiert ist.

Im folgenden werden Bedingungen angegeben, denen die Bilder der Repräsentanten unterliegen, die in einer Restklassenzerlegung nach solch einer Untergruppe von endlichem Index auftreten.

Wenn die Gruppe G durch eine Restklassenzerlegung bezüglich der Untergruppe V mit der Repräsentantenmenge A

$$G = A V$$

gegeben ist, so setzen wir für jedes Element $g \in G$

$$\bar{g} = a_i, \text{ wenn } g \equiv a_i \pmod{V} \text{ mit } a_i \in A$$

und

$$v(g) = \bar{g}^{-1} g.$$

Satz 4.1. Das Radikal eines Endomorphismus $\eta \in E(G)$, der eine η -zulässige Untergruppe V von endlichem Index n in der Gruppe G besitzt, genügt der Bedingung

$$R(\eta) \eta^n \subseteq V.$$

Beweis: Es sei $g \in G$ ein Element mit den Eigenschaften

$$(4.1) \quad g\eta^n \neq e, g\eta^n \notin V.$$

Wegen der η - Zulässigkeit von V gilt

$$(4.2) \quad e \neq \bar{g}\eta^i \notin V \quad \text{für alle } i \text{ mit } 0 \leq i \leq n.$$

Von diesen $n+1$ Elementen, die in n Restklassen liegen, müssen mindestens zwei Elemente in der gleichen Restklasse enthalten sein. Deshalb besteht für ganze Zahlen r, s die Beziehung

$$\bar{g}\eta^{r+s} \equiv \bar{g}\eta^r \pmod{V} \quad \text{mit } 0 \leq r < r+s \leq n$$

und allgemein ergibt sich wegen der η - Zulässigkeit von V

$$\bar{g}\eta^{r+is} \equiv \bar{g}\eta^r \pmod{V} \quad \text{für } i \geq 1.$$

Dieser Beziehung entnehmen wir nun auf Grund von (4.2)

$$g\eta^{r+is} \neq e \quad \text{für alle } i \geq 1,$$

sodaß für ein Element mit der Eigenschaft (4.1)

$$g \notin R(\eta)$$

gilt. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 4.2. In der Gruppe G besitze der Endomorphismus $\eta \in E(G)$ eine η - zulässige Untergruppe V von endlichem Index n . Es sei

$$G = A \cup V$$

eine Restklassenzerlegung bezüglich der Untergruppe V , wobei der Komplex $A = \bigcup_{\nu=1}^n a_\nu$ mit $a_1 = e$

die Menge der Repräsentanten darstellt. Nun definieren wir als Teilmengen A_1, A_2 von A

$$A_1 = \{ a_v \in A \mid a_v \eta^{t_v} \equiv e \bmod V \text{ für ein } t_v \in \mathbb{N} \},$$

$$A_2 = \{ a_v \in A \mid a_v \eta^{t_v} \equiv a_v \bmod V \text{ für ein } t_v \in \mathbb{N} \}.$$

Dann bestehen die Beziehungen

$$(a) \quad A_1 \cap A_2 = e,$$

$$(b) \quad (A_2 V) \eta \leq A_2 V,$$

$$(c) \quad G \eta^n \leq A_2 V,$$

$$(d) \quad G = B_2 B_1 V,$$

wobei die Komplexe B_i für $i=1,2$ die Form

$$B_i = \bigcup_{a_j \in A_i} a_j v_j$$

mit beliebigen Elementen $v_j \in V$ haben.

Künftig wird auch die Bezeichnungsweise $A_2^\# = A_2 \setminus e$ verwendet.

Beweis: (a). Die Behauptung läßt sich unmittelbar einsehen.

(b). Im weiteren Verlauf des Beweises werden wir die Beziehung

$$(4.3) \quad \overline{g \eta} \equiv \bar{g} \eta \bmod V$$

häufig benützen.

Ein Element $g \in A_2 V$, d.h. $\bar{g} \in A_2$, besitzt eine natürliche Zahl l mit der Eigenschaft

$$(4.4) \quad \bar{g} \eta^l \equiv \bar{g} \bmod V.$$

Unter Ausnutzung der Formeln (4.3) und (4.4) erhalten wir die Beziehungen

$(\overline{g\eta}) \eta^i \equiv \overline{g} \eta^{i+1} \bmod V \equiv \overline{g} \eta \bmod V \equiv \overline{g\eta} \bmod V$,
 wonach $\overline{g\eta} \in A_2$, also auch $g\eta \in A_2 V$ gilt.

(c). Mit der gleichen Begründung wie in Satz 4.1
 gibt es ganze Zahlen r und s

$$g \eta^{r+s} \equiv g \eta^r \bmod V \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < r+s \leq n,$$

woraus sich leicht

$$(\overline{g\eta^r}) \eta^s \equiv \overline{g\eta^r} \bmod V$$

ableiten läßt, d.h. $\overline{g\eta^r} \in A_2$ oder $g\eta^r \in A_2 V$.

Nach Aussage (b) ist $A_2 V$ η -zulässiger Komplex und
 daher gilt auch $g\eta^n \in A_2 V$.

(d). Dem Beweis der Aussage (d) sei folgende Bemerkung
 vorangeschickt.

Zu jedem Element $a_i \in A_2$ existiert ein Element $a_j \in A_2$
 mit der Eigenschaft

$$a_j \eta \equiv a_i \bmod V.$$

Für $a_i \in A_2$ besteht eine Gleichung $a_i \eta^{i_i} \equiv a_i \bmod V$,
 mit deren Hilfe man a_j bestimmen kann

$$a_j = \overline{a_i \eta^{i_i - 1}}.$$

Daß a_j unsere Forderungen erfüllt, sieht man aus den
 Beziehungen

$$a_j \eta = \overline{a_i \eta^{i_i - 1}} \eta \equiv a_i \eta^{i_i} \bmod V \equiv a_i \bmod V.$$

Nun beweisen wir die Darstellung

$$G = B_2 B_1 V$$

Jedes Element $g \in G$ läßt sich in der Art

$$g = a_2 v_2 a_1 v_1$$

mit einem beliebigen Element $v_2 \in V$ und gewissen durch g und v_2 bestimmten Elementen $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $v_1 \in V$ darstellen. Nach Aussage (c) gilt $g\eta^n \in A_2 V$, d.h.

$g\eta^n \in A_2$, sodaß nach Voraussetzung ein Element $a \in A_2$ mit der Eigenschaft

$$a\eta^n = \overline{g\eta^n} v_3 \quad \text{mit } v_3 \in V$$

existiert. Elemente a_1 , a_2 , v_1 mit den geforderten Eigenschaften werden geliefert durch

$$a_2 = a, \quad a_1 = \overline{v_2^{-1} a_2^{-1} g},$$

$$v_2 = v(v_2^{-1} a_2^{-1} g).$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} g &= a_2 v_2 \cdot \overline{v_2^{-1} a_2^{-1} g} \cdot v(v_2 a_2^{-1} g) \\ &= a_2 v_2 v_2^{-1} a_2^{-1} g = g, \end{aligned}$$

weiterhin gilt natürlich $a_2 \in V$, $v_2 \in V$ und schließlich $a_1 \in A_1$ auf Grund der Beziehung

$$\begin{aligned} (v_2^{-1} a_2^{-1} g)\eta^n &= \\ (v_2^{-1})\eta^n (v_3^{-1})\eta^n (\overline{g\eta^n})^{-1} \overline{g\eta^n} v(g\eta^n) &\in V. \end{aligned}$$

§ 5. Verwandtschaft von Endomorphismen von
endlicher Stufe und von endlichem Typus.

Zulässig verwandte Endomorphismen einer Gruppe bilden Äquivalenzklassen. In den folgenden Paragraphen werden Eigenschaften von Endomorphismen angeführt, die bereits jeder Endomorphismus einer Klasse besitzt, wenn sie ein Endomorphismus dieser Klasse besitzt. Es wird sich zeigen, daß die Begriffe verwandt, bzw. stark verwandt in diesem Zusammenhang nicht geeignet sind (siehe Beispiel 6.4).

Satz 5.1. Ist ein Endomorphismus von endlicher Stufe, so sind es gleichzeitig seine zulässig verwandten Endomorphismen.

Beweis: Der Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ genügt für eine natürliche Zahl l der Gleichung

$$(5.1) \quad K(\sigma^l) = K(\sigma^{l+1}) = R(\sigma).$$

Die zulässig verwandten Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ bestimmen eine Untergruppe V vom Typus $V_{\sigma, \tau}$ (siehe § 3) mit endlichem Index n . Satz 4.1 liefert uns $R(\tau)\tau^n \subseteq V$ und zusammen mit Formel (5.1) ergeben sich die Beziehungen

$$R(\tau)\tau^n \subseteq R(\tau|V) = R(\sigma|V) =$$

$$K(\sigma^l|V) = K(\tau^l|V) \subseteq K(\tau^l).$$

Deshalb gilt insbesondere

$$R(\tau) \leq K(\tau^{n+l})$$

und wir erhalten $R(\tau) = K(\tau^{n+l})$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 5.2. Ist ein Endomorphismus von endlichem Typus, so sind es gleichzeitig seine zulässig verwandten Endomorphismen.

Beweis: Es gibt eine natürliche Zahl m , für die der Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ der Gleichung

$$(5.2) \quad G\sigma^m = G\sigma^{m+1}$$

genügt. Zunächst wird gezeigt, daß auf einer Untergruppe $V = V_{\sigma, \tau}$ die Beziehungen

$$(5.3) \quad V\sigma^m = V\sigma^{m+1}, \text{ bzw. } V\tau^m = V\tau^{m+1}$$

bestehen.

Für die Bildgruppe $G\sigma^m$ ist der induzierte Endomorphismus $\sigma|_{G\sigma^m}$ auf Grund von Formel (5.2) Epimorphismus; weiterhin ergibt sich wegen der σ -Zulässigkeit von V

$$[G\sigma^m : (G\sigma^m \cap V)] < \infty$$

und

$$(G\sigma^m \cap V)\sigma \leq G\sigma^m \cap V.$$

Lemma 2.3 liefert dann

$$(5.4) \quad (G\sigma^m \cap V)\sigma = G\sigma^m \cap V.$$

Nun wird die Verbindung zwischen den Bildgruppen von V und $G\sigma^m \cap V$ hergestellt; aus

$$V\sigma^m \subseteq G\sigma^m \cap V = (G\sigma^m \cap V)\sigma^m \subseteq V\sigma^m$$

folgt

$$V\sigma^m = G\sigma^m \cap V.$$

Zusammen mit Aussage (5.4) erhalten wir also (5.3).

Es werde eine Restklassenzerlegung der Gruppe $G = AV$ durchgeführt, wobei die Mengen A , A_1 und $A_1^\#$ die gleiche Bedeutung wie in Satz 4.2 haben sollen.

Jedes Element $a_i \in A_1$ besitzt eine natürliche Zahl $t_i = t_i(a_i)$ der Eigenschaft

$$a_i \tau^{kt_i} = a_i v_i v_i \tau^{t_i} \dots v_i \tau^{(k-1)t_i}, v_i \in V.$$

Wir wählen nun eine natürliche Zahl $s_i \geq m/t_i$ und setzen $b_i = a_i \tau^{s_i t_i}$. Es gilt

$$b_i \tau^{t_i} = b_i v_i \tau^{s_i t_i},$$

wobei sich $v_i \tau^{s_i t_i} \in V\tau^m$ wegen der Wahl von s_i ergibt. Nach (5.3) existiert ein Element $\tilde{v}_i \in V\tau^m$ mit

$$\tilde{v}_i \tau = (v_i \tau^{s_i t_i})^{-1},$$

sodaß die Beziehung

$$(5.5) \quad (b_i \tau^{t_i-1} \tilde{v}_i) \tau = b_i$$

besteht. Mit den eben konstruierten Elementen bilden wir folgende Komplexe

$$(5.6) \quad B_2 = \left(\bigcup_{a_i \in A_2} b_i = a_i \tau^{s_i t_i} \right),$$

$$B = \left(\bigcup_{\substack{b_i \in B_2 \\ 0 \leq j < t_i}} b_i \tau^j \right).$$

Die Untergruppe

$$(5.7) \quad H = \{ V \tau^m, B \}$$

ist wegen (5.3), (5.5), (5.6) τ -vollständig

$$(5.8) \quad H \tau = H.$$

Satz 4.2 liefert

$$(5.9) \quad G \tau^n \subseteq A_2 V = B_2 V.$$

Die Zusammenfassung der Ergebnisse von (5.3), (5.7), (5.8) und (5.9) ergibt

$$G \tau^{n+m} \subseteq (B_2 V) \tau^m \subseteq \{B, V \tau^m\} = H =$$

$$H \tau^{n+m+1} \subseteq G \tau^{n+m+1},$$

$$\text{d.h.} \quad G \tau^{n+m} = G \tau^{n+m+1}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 6. Verwandtschaft von zerfällenden

Endomorphismen.

In diesem Abschnitt wenden wir uns zerfällenden Endomorphismen zu. Es wird zunächst keine Bedingung an die zugrunde liegende Gruppe gestellt.

Satz 6.1. Ist ein Endomorphismus zerfällend, so sind es gleichzeitig die zulässig verwandten Endomorphismen.

Beweis: Die Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ sind zulässig verwandt und σ ist zerfällend mit dem Komplement $C(\sigma)$. Ziel des Beweises ist, das Radikal $R(\tau)$ zu bestimmen und ein Komplement $C(\tau)$ zu finden.

Die Charakterisierung der Repräsentanten einer Restklassenzerlegung nach einer Untergruppe $V = V_{\sigma, \tau}$ erfolgt wie in Satz 4.2.

Die Anwendung von Satz 2.4 auf die (σ, τ) - zulässige Untergruppe V liefert für die Untergruppen

$$(6.1) \quad C = C(\tau|V) = C(\sigma|V) = C(\sigma) \cap V,$$

$$R = R(\tau|V) = R(\sigma|V) = R(\sigma) \cap V$$

folgende Aussagen

$$(6.2) \quad C\sigma = C\tau = C, \quad C \cap R = E, \quad V = CR.$$

Jedes Element $a_i \in A_1$ genügt für ein $t_i = t_i(a_i)$ der Beziehung

$$a_i \tau^{t_i} = v_i = \tau_i c_i \quad \text{mit} \quad v_i \in V, \tau_i \in R, c_i \in C.$$

Die Untergruppe C ist τ - vollständig, sodaß für ein Element $\tilde{c}_i \in C$

$$\tilde{c}_i \tau^{t_i} = c_i^{-1}$$

gilt, d.h. für die Elemente $b_i = a_i \tilde{c}_i$

$$b_i \tau^{t_i} = r_i \in R(\tau|V).$$

Die Menge $B_1 = \bigcup_{a_i \in A_1} (b_i = a_i \tilde{c}_i)$ hat dann folgende Eigenschaften

$$(6.3) \quad B_1 \subseteq R(\tau), \quad A_1 V = B_1 V.$$

Wir beweisen nun, daß das Radikal $R(\tau)$ durch

$$(6.4) \quad R(\tau) = \{R, B_1\}$$

dargestellt wird.

Die Formeln (6.1), (6.3) ergeben $\{R, B_1\} \subseteq R(\tau)$.

Umgekehrt gilt für das Radikal nach Satz 4.1 $R(\tau) \tau^n \subseteq V$.

Nach der Wahl des Komplexes A_1 in Satz 4.2 umfaßt $A_1 V$

das Radikal, d.h. $R(\tau) \subseteq A_1 V$, bzw. nach (6.3) auch

$R(\tau) \subseteq B_1 V$. Der Formel (6.3) entnehmen wir weiter

$B_1 \subseteq R(\tau)$, deshalb folgt nach der Festlegung von R durch (6.1)

$$(6.5) \quad R(\tau) \subseteq B_1 R.$$

Somit ist (6.4) bewiesen.

Jetzt soll ein Komplement zu $R(\tau)$ bestimmt werden.

Jedes Element $a_i \in A_2$ genügt für eine natürliche

Zahl $t_i = t_i(a_i)$ der Beziehung

$$a_i \tau^{kt_i} = a_i v_i v_i \tau^{t_i} \dots v_i \tau^{(k-1)t_i}$$

$$v_i = c_i \tau_i, c_i \in C, \tau_i \in R.$$

Wir wählen eine natürliche Zahl s_i mit der Eigenschaft $\tau_i \tau^{s_i t_i} = e$ und setzen $b_i = a_i \tau^{s_i t_i}$. Es gilt

$$b_i \tau^{t_i} = b_i c_i \tau^{s_i t_i}.$$

Da C τ -vollständig ist, existiert ein Element $\tilde{c} \in C$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{c} \tau = (c_i \tau^{s_i t_i})^{-1},$$

sodaß die Beziehung

$$(6.6) \quad (b_i \tau^{t_i - 1} \tilde{c}) \tau = b_i$$

besteht. Dann bilden wir die Komplexe

$$(6.7) \quad \begin{aligned} B_2 &= \left(\bigcup_{a_i \in A_2} b_i = a_i \tau^{s_i t_i} \right), \\ B &= \left(\bigcup_{\substack{b_i \in B_2 \\ 0 \leq j < t_i}} b_i \tau^j \right). \end{aligned}$$

Die Untergruppe $\tilde{C} = \{C, B\}$ ist ein Komplement zu $R(\tau)$.

Die Aussagen (6.2), (6.6), (6.7) ergeben

$$\tilde{C} \tau = \tilde{C}.$$

Weiterhin ist

$$(6.8) \quad \tilde{C} \cap R(\tau) = E.$$

Die Untergruppe $\tilde{C}$ liegt in $A_2 V$, bzw. $B_2 V$, was aus den Beziehungen

$$\tilde{C} = \tilde{C} \tau^n \leq G \tau^n \leq A_2 V = B_2 V$$

ersichtlich wird. (6.5) zeigt $A_2^\# V \cap R(\tau) = \emptyset$, sodaß nur noch der Fall $g \in \tilde{C} \cap V$ möglich ist. Da $\sigma \in E(G)$ zerfällend ist, gilt für eine natürliche Zahl τ

$$\tilde{C} \sigma^r \subseteq C(\sigma).$$

Die Aussagen

$$\tilde{C} \tau = \tilde{C}, \quad [\tilde{C} : (\tilde{C} \cap V)] < \infty,$$

$$(\tilde{C} \cap V) \tau \subseteq \tilde{C} \cap V$$

liefern mit Hilfe von Lemma 2.3

$$(\tilde{C} \cap V) \tau = \tilde{C} \cap V,$$

sodaß

$$(\tilde{C} \cap V) = (\tilde{C} \cap V) \tau^r = (\tilde{C} \cap V) \sigma^r \subseteq \tilde{C} \sigma^r \subseteq C(\sigma)$$

gilt. Wir erhalten schließlich

$$R(\tau | V) \cap (\tilde{C} \cap V) = R(\sigma | V) \cap (\tilde{C} \cap V) \subseteq$$

$$R(\sigma) \cap (\tilde{C} \cap V) \subseteq R(\sigma) \cap C(\sigma) = E.$$

Damit ist (6.8) gezeigt.

Es gilt auch

$$(6.9) \quad \tilde{C} R(\tau) = G.$$

Nach Satz 4.2.d besitzt die Gruppe folgende Zerlegung

$$G = B_2 B_1 V,$$

sodaß sich nach Formel (6.2)

$$G = B_2 B_1 C R$$

ergibt. Der Komplex B_1 liegt im Radikal $R(\tau)$, das Normalteiler in G ist. Somit gibt es einen Komplex $D \subseteq R(\tau)$ der Eigenschaft

$$B_1 C \subseteq C D.$$

Die Relationen

$$G = B_2 B_1 C R \leq B_2 C D R \leq \tilde{C} R(\tau)$$

zeigen schließlich, daß $G = \tilde{C} R(\tau)$ gilt.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Dieser Satz behandelte zulässig verwandte Endomorphismen. Betrachten wir endlich erzeugte Gruppen, so können wir unsere Aussage allgemein auf verwandte Endomorphismen übertragen. Zuvor wird ein Lemma gezeigt, das beim Beweis dieser Tatsache benutzt wird.

Lemma 6.2. Ist H Untergruppe von endlichem Index in G , so gibt es zu jedem Endomorphismus $\eta \in E(G)$ eine Untergruppe L mit den Eigenschaften

$$L \leq H, L\eta \leq H, [G:L] < \infty.$$

Beweis: Eine Untergruppe L mit den angegebenen Eigenschaften wird durch

$$L = U K(\eta) \cap H$$

geliefert, wobei die Untergruppe U die Beziehung $U\eta = H\eta \cap H$ erfüllen soll.

$L \leq H$ läßt sich durch die Definition sofort einsehen, weiterhin gilt für das Bild $L\eta \leq H$ wegen

$$\begin{aligned} L\eta &= (U K(\eta) \cap H)\eta \leq (U K(\eta))\eta \cap H\eta = \\ &H\eta \cap H \cap H\eta \leq H. \end{aligned}$$

Beim Beweis von $[G : (UK(\eta) \cap H)] < \infty$ kann man sich auf die schwächere Forderung

$$[G : UK(\eta)] < \infty$$

beschränken, da die Untergruppe H nach Voraussetzung von endlichem Index ist. Nach einem Isomorphiesatz gilt

$$UK(\eta)/K(\eta) \cong (UK(\eta))\eta = U\eta,$$

$$HK(\eta)/K(\eta) \cong (HK(\eta))\eta = H\eta.$$

Diese beiden Aussagen führen zusammen mit $[H\eta : U\eta] < \infty$ auf

$$[HK(\eta) : UK(\eta)] < \infty.$$

Da die Untergruppe H aber von endlichem Index in G ist, läßt sich das Ergebnis erweitern zu

$$[G : UK(\eta)] < \infty.$$

Damit sind die geforderten Eigenschaften nachgewiesen.

Satz 6.3. In einer endlich erzeugten Gruppe sind verwandte Endomorphismen stets gleichzeitig zerfällend (oder nicht zerfällend).

Beweis: Ein zerfällender Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ ist nach Satz 2.8 von endlichem Typus und endlicher Stufe, deshalb gilt für eine natürliche Zahl l

$$(6.10) \quad G\sigma^l = G\sigma^{l+1} = C(\sigma), \quad K(\sigma^l) = K(\sigma^{l+1}),$$

wobei $C(\sigma)$ Komplement zum Radikal $R(\sigma) = K(\sigma^l)$ ist.

$\tau \in E(G)$ ist zu σ verwandt, der Kern $K(\sigma - \tau)$ ist in G also von endlichem Index.

Nach einem Satz von M. Hall [4] gibt es in einer endlich erzeugten Gruppe G zu jeder Untergruppe U von endlichem Index eine charakteristische Untergruppe $\tilde{U}$ in U von endlichem Index in G . ($\tilde{U} \trianglelefteq G$).

Mit Hilfe dieses Satzes finden wir eine Untergruppe $C \leq C(\sigma)$, die die Eigenschaften

$$C \leq C(\sigma) \cap K(\sigma - \tau), \quad C \trianglelefteq C(\sigma),$$

$$[C(\sigma) : C] < \infty$$

besitzt.

Nach Lemma 6.2 existiert in der Untergruppe $R(\sigma) \cap K(\sigma - \tau)$, die in $R(\sigma)$ von endlichem Index ist, eine Untergruppe R_1 mit den Eigenschaften

$$R_1 \leq R(\sigma) \cap K(\sigma - \tau), \quad R_1 \sigma \leq R(\sigma) \cap K(\sigma - \tau),$$

$$[R(\sigma) : R_1] < \infty.$$

Daraus ergibt sich eine Untergruppenfolge

$$R \cap K(\sigma - \tau) = R_0 \geq R_1 \geq \dots \geq R_l = R,$$

für die

$$R_{i+1} \sigma \leq R_i, \quad 0 \leq i < l$$

$$[R_i : R_{i+1}] < \infty$$

gilt. Die Bilder von R mit den Potenzen σ^i genügen der Bedingung

$$R \sigma^i \leq R_0 = R(\sigma) \cap K(\sigma - \tau) \quad \text{für } 0 \leq i \leq l.$$

Da nach (6.10) $R \sigma^l = E$ gilt, erhalten wir als Resultat

$$\sigma^i IR = \tau^i IR \quad \text{für alle } i \geq 1,$$

$$[R(\sigma) : R] < \infty.$$

Die Untergruppe $U = \{C, R\}$ ist von endlichem Index in G . Für $C(\sigma)$ und $R(\sigma)$ gibt es die Restklassenzerlegungen

$$C(\sigma) = HC, \quad R(\sigma) = IR$$

mit den Repräsentantenmengen H, I , die beide von endlicher Ordnung sind. Nach Voraussetzung besteht die Zerlegung

$$G = (HC)(IR).$$

Weil $IR = R(\sigma)$ Normalteiler in G ist, gilt für einen Komplex $K \subseteq R(\sigma)$

$$CI \subseteq KC.$$

Die Beziehungen

$$G = HCIR \subseteq HKCR \subseteq HIRCR \subseteq HIU;$$

d.h. $G = HIU$

zeigen, daß U von endlichem Index in G ist.

Wir werden die Zerlegung von nun an durch

$$G = AU$$

kennzeichnen, wobei $A = \bigcup_1^n a_i$, $a_1 = e$ ist. Im verbleibenden Teil des Beweises wird gezeigt, daß τ von endlichem Typus und endlicher Stufe ist.

Jedes Element $a_i \in A$ besitzt ganze Zahlen s_i, t_i mit den Eigenschaften

$$a_i \tau^{s_i + (k+1)t_i} = a_i \tau^{s_i} u_i u \tau^{t_i} \dots u_i \tau^{kt_i},$$

$$u_i \in U, \quad 0 \leq s_i < s_i + t_i \leq n.$$

Wir wählen nun eine natürliche Zahl $\tau_i \geq 1/t_i$ und setzen $b_i = a_i \tau^{s_i + \tau_i t_i}$. Es gilt

$$b_i \tau^{t_i} = b_i u_i \tau^{\tau_i t_i},$$

wobei sich $u_i \tau^{\tau_i t_i} \in C$ wegen der Wahl von τ_i ergibt. Da die Untergruppe C τ -vollständig ist, existiert ein Element $\tilde{u}_i \in C$

$$\tilde{u}_i \tau = (u_i \tau^{\tau_i t_i})^{-1},$$

sodaß die Beziehung

$$(6.11) \quad (b_i \tau^{t_i - 1} \tilde{u}_i) \tau = b_i \quad \text{mit } \tilde{u}_i \in C$$

besteht. Nun führen wir noch die Menge

$$(6.12) \quad B = \left(\bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j < t_i}} b_i \tau^j \right)$$

ein. Für die Untergruppe $D = \{C, B\}$ gilt wegen $C\tau = C$, (6.11) und (6.12)

$$D\tau = D.$$

Wenn wir das Maximum $h = \max_{1 \leq i \leq n} s_i + \tau_i t_i$ bestimmen, wobei sich $h \geq 1$ ergibt, gilt für die Menge der Repräsentanten $A\tau^h \subseteq D$; weiterhin ist $U\tau^1 = C$, sodaß die Beziehung

$$G\tau^h = (AU)\tau^h \subseteq D = D\tau^{h+1} \subseteq G\tau^{h+1},$$

$$\text{d.h.} \quad G\tau^h = G\tau^{h+1}$$

besteht.

Damit besitzt τ endlichen Typus.

Nach vorangegangenen Bemerkungen besitzt der Repräsentant $\bar{g}$ eines Elements $g \in G$ ganze Zahlen r, s und t , für die

$$(6.13) \quad \bar{g} \tau^{s + (\tau + j)^t} \equiv \bar{g} \tau^{s + \tau^t} \pmod{C} \quad \text{für alle } j \geq 0$$

gilt. Nehmen wir an, es sei

$$(6.14) \quad e \neq \bar{g} \tau^{s + \tau^t} \notin C,$$

so folgt daraus wegen (6.13)

$$e \neq \bar{g} \tau^{s + (\tau + j)^t} \notin C \quad \text{für alle } j \geq 0$$

und da C τ -vollständig ist,

$$e \neq \bar{g} \tau^i \notin C \quad \text{für alle } i > 0.$$

Das Element $u(g)$ genügt der Bedingung $u(g) \tau^{t+i} \in C$ für alle $i \geq 0$. Somit gilt für jedes Element $g \in G$ unter der Voraussetzung (6.14) $g \notin R(\tau)$. Unter Benutzung der vorher definierten Zahl h läßt sich dies mit

$$R(\tau) \tau^h \subseteq C$$

ausdrücken. Der Endomorphismus τ induziert auf der Untergruppe C einen Automorphismus, d.h. dann

$$K(\tau^h) = K(\tau^{h+1}).$$

τ ist also von endlicher Stufe.

Da τ von endlichem Typus und endlicher Stufe ist, folgt nach Satz 2.7, daß τ zerfällend ist.

Die Eigenschaften eines Endomorphismus von endlichem Typus, bzw. von endlicher Stufe, bzw. zerfällend zu

sein, übertragen sich nicht allgemein auf verwandte, bzw. stark verwandte Endomorphismen. Das soll ein Beispiel zeigen.

Beispiel 6.4. Wir greifen auf das Beispiel aus Satz 3.5.c zurück.

Die Endomorphismen $\sigma, \tau \in E(G)$ seien wie in diesem Beispiel definiert. σ und τ sind stark verwandt, d.h. auch verwandt, aber nicht zulässig verwandt. σ ist Automorphismus, daher von endlichem Typus, von endlicher Stufe und zerfällend.

Die Bildgruppenfolge von τ lautet

$$G\tau^i = \dots \oplus Z_{-(i+1)} \oplus Z_i \oplus E_{-i+1} \oplus \dots \oplus E_0 \oplus Z_1 \oplus Z_2 \oplus \dots$$

Also ist τ nicht von endlichem Typus.

Die Kernfolge von τ lautet

$$K(\tau^i) = \dots \oplus E_{-1} \oplus E_0 \oplus Z_1 \oplus \dots \oplus Z_i \oplus E_{i+1} \oplus E_{i+2} \oplus \dots$$

τ ist auch nicht von endlicher Stufe.

Das Radikal von τ ist

$$R(\tau) = \dots \oplus E_{-1} \oplus E_0 \oplus Z_1 \oplus \dots \oplus Z_i \oplus Z_{i+1} \oplus \dots$$

Dazu läßt sich kein Komplement finden, wie aus

$$G\tau R(\tau) \subset G$$

folgt. Also ist τ auch nicht zerfällend.

§ 7. Verwandtschaft von uniform

zerfallenden Endomorphismen.

In diesem Paragraphen wollen wir uniform zerfallende Endomorphismen betrachten. Zunächst werden zwei Sätze vorangeschickt, die uns bei der Untersuchung dieses Problems nützlich sind.

Satz 7.1. Ist auf einer Gruppe G ein Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ σ - lokal von endlichem Typus, so ist jeder zulässig verwandte Endomorphismus $\tau \in E(G)$ τ - lokal von endlichem Typus.

Beweis: Unter den τ - lokalen Untergruppen betrachten wir zunächst die τ - zyklischen Untergruppen. Auf jeder Untergruppe $A = \{g; \tau\}$ mit $g \in G$ soll der induzierte Endomorphismus $\tau_0 = \tau|_A$ von endlichem Typus sein. Die Repräsentanten einer Restklassenzerlegung

$$G = \sum_{v=0}^n a_v V$$

nach einer Untergruppe V vom Typus $V_{\sigma, \tau}$ seien so gewählt, daß sich die Bildfolge des Elements g

$$g \tau^i = a_i \quad 0 \leq i \leq s+t,$$

$$g \tau^{s+t} = a_{s+t} = a_s v, \quad v \in V$$

schreibt (s und t sind ganze Zahlen). Daraus leitet man allgemein

$$(7.1) \quad g \tau^{s+jt+i} = a_{s+i} v \tau^i \dots v \tau^{(j-1)t+i}, \quad j \geq 1, 0 \leq i < t$$

ab. Für das Element $v \in V$ besteht eine Gleichung

$$(7.2) \quad \{v; \tau\} \tau^{l+1} = \{v; \tau\} \tau^l.$$

Für eine natürliche Zahl τ gelte $\tau \geq 1$ mit $\tau \geq 1$.
Nun behaupten wir, daß die Gleichung

$$A = \tilde{A},$$

$$\tilde{A} = \left\{ \bigcup_{j=0}^{s+(\tau+1)t-1} g\tau^j, \{v\tau^{\tau^t}; \tau\} \right\}$$

besteht. Zunächst gilt $\tilde{A} \subseteq A$; denn wir erhalten mit Hilfe der Erzeugenden von A die Erzeugenden von $\tilde{A}$

$$v\tau^{(\tau+j)t+i} = (g\tau^{s+(\tau+j)t+i})^{-1} \cdot g\tau^{s+(\tau+j+1)t+i}, \quad j \geq 0, 0 \leq i < t$$

und umgekehrt $A \subseteq \tilde{A}$; denn die Erzeugenden von A sind mit den Erzeugenden von $\tilde{A}$ auf folgende Weise darstellbar

$$g\tau^{s+(\tau+j+1)t+i} = g\tau^{s+\tau^t+i} \cdot v\tau^{\tau^t+i} \dots v\tau^{(\tau+j)t+i}, \quad j \geq 0, 0 \leq i < t.$$

Unter Verwendung der Darstellung von A in der Form $\tilde{A}$ wird jetzt die Beziehung

$$(7.3) \quad A\tau^{s+\tau^t} = A\tau^{s+\tau^t+1}$$

bewiesen.

Für die Untergruppe $B = \{v\tau^{\tau^t}; \tau\}$ gilt wegen (7.2) und der Wahl von τ

$$(7.4) \quad B = \{v\tau^{\tau^t}; \tau\} = \{v; \tau\} \tau^{\tau^t} = (\{v; \tau\} \tau^{\tau^t}) \tau = B\tau.$$

Unter Benutzung von (7.4) ergeben sich folgende Bildgruppen

$$(7.5) \quad \tilde{A}\tau^{s+\tau t} = \left\{ \bigcup_{i=s+\tau t}^{2(s+\tau t)+t-1} g\tau^i, \{v\tau^{\tau t}; \tau\} \right\},$$

$$(7.6) \quad \tilde{A}\tau^{s+\tau t+1} = \left\{ \bigcup_{i=s+\tau t+1}^{2(s+\tau t)+t} g\tau^i, \{v\tau^{\tau t}; \tau\} \right\}.$$

Die Erzeugenden der in (7.5) definierten Bildgruppe können durch die Erzeugenden von (7.6) dargestellt werden, was aus

$$g\tau^{s+\tau t} = g\tau^{s+(\tau+1)t} (v\tau^{\tau t})^{-1}$$

ersichtlich wird; andererseits gilt natürlich

$$\tilde{A}\tau^{s+\tau t+1} \subseteq \tilde{A}\tau^{s+\tau t}.$$

Damit ist die Beziehung (7.3) gezeigt.

Sind die auf den Untergruppen $B_1 = \{g_1; \tau\}$ und $B_2 = \{g_2; \tau\}$ mit $g_1, g_2 \in G$ induzierten Endomorphismen jeweils von endlichem Typus, so ist auch der auf dem Kompositum $\tilde{B} = \{g_1, g_2; \tau\}$ induzierte Endomorphismus $\tau|_{\tilde{B}}$ von endlichem Typus.

Satz 7.2. Ist auf einer Gruppe G ein Endomorphismus $\sigma \in E(G)$ σ - lokal von endlicher Stufe und σ - lokal von endlichem Typus, so ist jeder zulässig verwandte Endomorphismus $\tau \in E(G)$ τ - lokal von endlichem Typus und τ - lokal von endlicher Stufe.

Beweis: Aus Satz 7.1 folgt sofort, daß τ τ - lokal von endlichem Typus ist.

Für die Untergruppen $U_i = \{g_i; \tau\}$ mit $g_i \in G$ für $1 \leq i \leq s$ bilden wir das Kompositum

$$U = \{ \bigcup_{i=1}^s g_i; \tau \}.$$

Nach Satz 7.1 lassen sich die Untergruppen U_i auf folgende Art darstellen

$$U_i = \{ \bigcup_{j=0}^{\tau_i} g_i \tau^j, \{h_i; \tau\} \}$$

mit $h_i \in V$ für $1 \leq i \leq s$,

wobei V wieder Untergruppe vom Typus $V_{\sigma, \tau}$ ist und $\tau_i \in \mathbb{N}$, bzw. $h_i \in V$ geeignet festgelegt sind. Die σ -lokale Untergruppe H

$$H = \{ (\bigcup_{1 \leq i \leq s} g_i \tau^j, \bigcup_{1 \leq i \leq s} h_i); \sigma \}$$

$0 \leq j \leq \tau_i$

umfaßt die Untergruppe U wegen $\{h_i; \tau\} = \{h_i; \sigma\}$ für $1 \leq i \leq s$

$$U \subseteq H.$$

Nach Voraussetzung gilt für eine natürliche Zahl l

$$K(\sigma^l | H) = K(\sigma^{l+1} | H),$$

ebenso für die Untergruppe $U \cap V \subseteq H$

$$K(\sigma^l | U \cap V) = K(\sigma^{l+1} | U \cap V).$$

$\sigma|V$ und $\tau|V$ sind gleich, also folgt

$$K(\tau^l | U \cap V) = K(\tau^{l+1} | U \cap V).$$

Satz 4.1 liefert uns $R(\tau)\tau^{n+1} \subseteq V$, und weil U eine τ -zulässige Untergruppe ist, erhalten wir

$$R(\tau|U)\tau^{n+1} \subseteq U \cap V,$$

sodaß die Beziehungen

$$K(\tau^{n+l+1} | U) = K(\tau^{n+l+2} | U)$$

bestehen. Damit ist auch die Behauptung gezeigt.

Satz 7.3. Ist ein Endomorphismus uniform zerfällend, so sind es auch seine zulässig verwandten Endomorphismen.

Beweis: Zusammenfassung von Satz 2.9 und Satz 7.2.

Wir betrachten nun Beispiele von uniform zerfällenden Endomorphismen.

Beispiel 7.4. Ein Endomorphismus, der zum identischen Endomorphismus oder zum Nullendomorphismus verwandt ist, ist uniform zerfällend. Diese Aussage folgt aus Satz 7.3.

Für ein weiteres Beispiel sind noch folgende Vorbereitungen nötig.

Definition 7.5. Der Endomorphismus $\eta \in E(G)$ heißt periodisch, wenn

$$G = F(\eta) R(\eta) = \tilde{F}(\eta)$$

gilt, wobei für alle Elemente $g \in F(\eta)$ ein $l = l(g)$ mit der Eigenschaft $g\eta^l = g$ existiert. $F(\eta)$ wird auch als Hyperfixgruppe bezeichnet.

Satz 7.6. Jeder periodische Endomorphismus ist uniform zerfällend.

Beweis: In der Gruppe $G = F(\eta) R(\eta)$ ist die Hyperfixgruppe $F(\eta)$ ein Komplement zu $R(\eta)$, damit ist

η zerfällend. In der η - zulässigen Untergruppe H gilt für den induzierten Endomorphismus $\eta_0 = \eta|_H \in E(H)$

$$F(\eta_0) = F(\eta) \cap H, \quad R(\eta_0) = R(\eta) \cap H,$$

sodaß η_0 ebenfalls periodisch ist mit der Zerlegung

$$H = (F(\eta) \cap H)(R(\eta) \cap H).$$

Nach den obigen Bemerkungen ist η_0 zerfällend. Dies heißt, daß η uniform zerfällend ist.

Definition 7.7. Ein Endomorphismus $\eta \in E(G)$ heißt fastperiodisch, wenn $\tilde{F}(\eta) = F(\eta)R(\eta)$ von endlichem Index in G ist.

Satz 7.8. Jeder zu einem periodischen Endomorphismus zulässig verwandte Endomorphismus ist fastperiodisch und uniform zerfällend.

Beweis: Zusammenfassung von Satz 7.3 und Satz 7.6.

Literatur

- [1] BAER, R. : Splitting endomorphisms. Trans.
Amer. Math. Soc. 61, 508-516 (1947).

- [2] BAER, R., and C. WILLIAMS : Splitting criteria
and extension types. Bull. Amer. Math.
Soc. 55, 729-743 (1949).

- [3] KUROSH, A.G. : The Theory of Groups, Vol. 2,
Chelsea Publishing Company (1956).

- [4] SCOTT, W.R. : Group Theory, Prentice-Hall,
New Jersey (1964).

- [5] SPECHT, W. : Gruppentheorie, Grundlehren der
math. Wiss., Springer-Verlag (1956).

- [6] SPECHT, W. : Zur Theorie der Endomorphismen,
Manuskript.

Lebenslauf

Am 7. November 1940 wurde ich, Hans Strauß, als Sohn des Geschäftsführers Otto Strauß und seiner Ehefrau Margarete, geb. Bachmann, in Nürnberg geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule und der Düreroberschule in Nürnberg legte ich im Juli 1960 das Abitur ab.

Im Wintersemester 1960/61 begann ich das Studium der Mathematik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, wo ich im März 1963 die Diplom-Vorprüfung und im März 1966 die Diplom-Hauptprüfung ablegte.

Seit März 1966 bin ich als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg tätig.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
